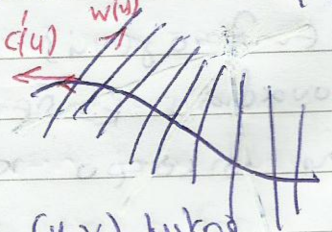
Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παράμετρο u
και $w: I \to \mathbb{R}^3$ διαν. συνάρτηση εω $\|w(u)\|=1$, $\forall u \in I$
Η παραμετρική επιφάνεια $x: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με
$x(u,v) = c(u) + v\,w(u)$, είναι ευθειογενής επιφάνεια
Αντίστροφα, κάθε ευθειογενής είναι της μορφής

$x(u,v) = c(u) + v\,w(u)$



$x_u = c' + v w'$, $x_v = w$

$x_u \times x_v\big|_{(u,0)} = c'(u) \times w(u) \neq 0$

$\Rightarrow$ Η x είναι κανονική για (u,v) μικρό

Πρώτη Θεμελ. Μορφή

$$\begin{cases} E = \|x_u\|^2 = \|c'(u) + v w'(u)\|^2 \\ F = \langle x_u, x_v \rangle = \langle c'(u) + v w'(u), w(u) \rangle = \langle c'(u), w(u) \rangle \\ G = \|x_v\|^2 = \|w\| = 1 \end{cases}$$

Το κάθετο (Μοναδιαίο)

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{c'(u)\times w(u) + v w'(u)\times w(u)}{\| \quad \cdots \quad \|} \quad (1)$$

$$e = \langle X_{uu}, N\rangle = \langle c''(u) + v w''(u), (1)\rangle$$

$$f = \langle X_{uv}, N\rangle = \langle w'(u), (1)\rangle = \frac{[c', w, w']}{\| \quad \cdots \quad \|}$$

$$g = \langle X_{vv}, N\rangle = 0$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{[c', w, w']^2}{\cdots} \leq 0$$

Πότε η X αναπτυκτή;

Απ. X είναι αναπτυκτή και τότε $K = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [c'(u), w(u), w'(u)] = 0, \ \forall u \in I$

Έστω ότι $[c', w, w'] = 0 \Rightarrow w' \perp c' \times w$

$\langle w, w\rangle = 1 \Rightarrow 2\langle w', w\rangle = 0 \Rightarrow w' \perp w$ $\Big\}$ $w' \parallel (c' \times w) \times w$

$(c' \times w) \times w = \langle c', w\rangle w - \langle w, w\rangle c' = \langle c', w\rangle w - c'$

$w' \parallel \langle c', w\rangle w - c' \Rightarrow w'(u) = h(u)\,(\langle c'(u), w(u)\rangle w(u) - c'(u))$

$X_u \times X_v = c'(u)\times w(u) + v w'(u) \times w(u) =$

$= c'(u) \times w(u) - v h(u)\, c'(u) \times w(u) =$

$= (1 - v h(u)) \cdot c'(u) \times w(u).$

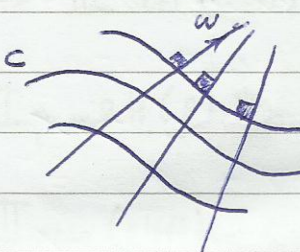
Άρα,

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \pm \frac{c'(u) \times w(u)}{\|c'(u) \times w(u)\|} \quad \text{Ανεξάρτητο του } v$$

$\Rightarrow$ N σταθερό κατά μήκος κάθε γενέτειρας $\Rightarrow$ X είναι αναπτυκτή επιφάνεια.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω η κανονική επιφάνεια ευθειογενής και παραμετρική $x(u,v) = c(u) + v\,w(u)$
$\|w(u)\| = 1$ και $c'(u) \times w(u) \neq 0$, $\forall u \in I$
Η x αναπτυκτή αν $[c'(u), w(u), w'(u)] = 0$, $u \in I$

Παρατήρηση:
Επειδή η οδηγός c δεν είναι μοναδική μπορώ να επιλέξω ώστε $\langle c'(u), w(u) \rangle = 0$, $u \in I$



$x_u = c' + v w'$, $x_v = w$

$E = \|x_u\|^2 = \|c' + v w'\|^2$

$F = \langle x_u, x_v \rangle = \langle c' + v w', w \rangle = 0$

$G = \|x_v\|^2 = 1$

Υποθέτω X αναπτυκτή $\Rightarrow$

$\Rightarrow [c', w, w'] = 0 \Rightarrow w' \perp c' \times w \ \&\ w' \perp w \Rightarrow$

$\Rightarrow w' \parallel (c' \times w) \times w \overset{\text{καθετότητα}}{=\!=} \cancel{\langle c', w \rangle}^{0} w - \langle w, w \rangle c' \Rightarrow$

$\Rightarrow w' \parallel c' \Rightarrow w'(u) = a(u)\, c'(u)$, $a(u)$: λεία συναρτ.

Διακρίνω 3 περιπτώσεις

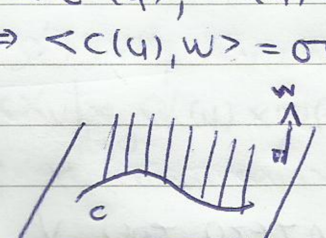
① Έστω $a(u) = 0$, $\forall u \in I_0 \subseteq I$

$w'(u) = 0$ $\forall u \in I_0 \Rightarrow w(u) = $ σταθ. στο I

Είχαμε επιλέξει καμπύλη τω

$\langle c'(u), w(u) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle c(u), w \rangle' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle c(u), w \rangle = $ σταθ $\Rightarrow c$ είναι επίπεδη



Η επιφάνεια είναι κυλινδρική

② Υποθέτω $a(u) = $ σταθ $\neq 0$ σε διάστημα $I_0 \subseteq I$

$w'(u) = \alpha \cdot c'(u) \Rightarrow (w(u) - \alpha c(u))' = 0 \Rightarrow w(u) - \alpha c(u) = p_0 = $ σταθ.

$\Rightarrow w(u) = \alpha c(u) + p_0$.

Έτσι, $x(u,v) = c(u) + v(\alpha c(u) + p_0) = (1 + \alpha v)\, c(u) + p_0 v$

$\Rightarrow x(u, -\frac{1}{\alpha}) = -\frac{1}{\alpha} P_0 \Rightarrow$ Η επιφάνεια είναι κωνική

③ Έστω $a(u) \neq 0$ και $a'(u) \neq 0$, $\forall u \in I_0 \subseteq I$

$X_u \times X_v = (c' + v w') \times w = c' \times w + v w' \times w =$

$= c' \times w + v a(u) c'(u) \times w(u) \Rightarrow X_u \times X_v = (1 + v a(u)) c'(u) \times w(u)$

Τα σημεία στα οποία η επιφάνεια είναι μη κανονική είναι

$x(u, -\frac{1}{a(u)}) = c(u) - \frac{1}{a(u)} \cdot w(u)$ ← Μελέτη της καμπύλης των ιδιαζόντων σημείων $\tilde{c}(u) = c(u) - \frac{1}{a(u)} w(u)$

$\tilde{c}'(u) = c'(u) + \frac{a'(u)}{a^2(u)} w(u) - \frac{1}{a(u)} a(u) c'(u) = \frac{a'(u)}{a^2(u)} w(u)$.

Οι καμπύλες αυτές δηλ. είναι οι εφαπτόμενες ευθείες αυτής της καμπύλης

Άρα, η επιφάνεια είναι επιφάνεια εφαπτομένων

Άρα, βρήκαμε όλες τις αναπτυκτές επιφάνειες

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Κάθε αναπτυκτή επιφάνεια είναι ΤΟΠΙΚΑ κυλινδρική επιφάνεια κωνική επιφάνεια, επιφάνεια εφαπτομένων

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω S επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K=0$ παντού δίχως ισόπεδα σημεία. (Με άλλα λόγια όλα είναι παραβολικά) Τότε η S τοπικά κυλινδρική, κωνική ή επιφάνεια εφαπτομ.

Έστω $x(u,v) = c(u) + v w(u)$ αναπτυκτή επιφάνεια

$\|w(u)\| = 1$, $\langle c'(u), w(u) \rangle = 0$.

$w'(u) = a(u) \cdot c'(u)$. όπου $X_u = c'(u) + u \cdot w'(u) = (1 + v a(u)) c'(u)$

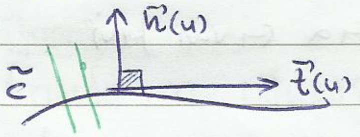
τότε $E = \|X_u\|^2 \Rightarrow E = (1 + v a(u))^2$ με u: μήκος τόξου

$F = \langle x_u, x_v \rangle = (1 + v a(u)) \langle c'(u), w(u) \rangle \Rightarrow F = 0$

$G = \|x_v\|^2 = \|w\|^2 = 1$

ΜΕΛΕΤΗ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ (Π).

Έστω καμπύλη $\tilde{c} : I \to \Pi$ με παράμετρο u: μήκος τόξου



Έστω μία νέα παραμετρική παράσταση του επιπέδου:

$$\tilde{X}(u,v) = \tilde{c}(u) + v\vec{n}(u)$$

Η $\tilde{X}$ είναι παραμέτρηση του (Π) για σημεία κοντά στην καμπύλη $\tilde{c}$.

$\tilde{X}_u = \tilde{c}'(u) + v\vec{n}'(u) = \dot{\tilde{c}}(u) + v\dot{\vec{n}}(u) =$

$\overset{\text{frenet}}{=} \vec{t}(u) - v k(u) \vec{t}(u) = \vec{t}(u)(1 - v k(u))$, k: καμπυλότητα της $\tilde{c}$

$\tilde{X}_v = \vec{n}(u)$

$\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v = (1 - v k(u)) \underbrace{\vec{t}(u) \times \vec{n}(u)}_{\neq 0}$

Για v κοντά στο 0, η $\tilde{X}$ κανονική με

1η Θεμελιώδη μορφή:

$\tilde{E} = \|\hat{X}_u\| = (1 - v k(u))^2$, $\tilde{F} = \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \rangle = 0$, $G = \|\tilde{X}_v\|^2 = \|\vec{n}(u)\|^2 = 1$

αρκεί $k(u) = -\alpha(u)$ με $\alpha(u)$ λεία

ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε αναπτυκτή επιφάνεια είναι τοπικά ισομετρική με το επίπεδο

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω S επιφάνεια με $k = 0$. Αν S δεν έχει ισόπεδα σημεία, τότε είναι τοπικά ισομετρική με το επίπεδο.

Άρα δ.ο υπάρχει ένα αντίστροφο θεώρημα για το έξοχο θεώρημα αλλά αν ισχύουν κάποια πράγματα